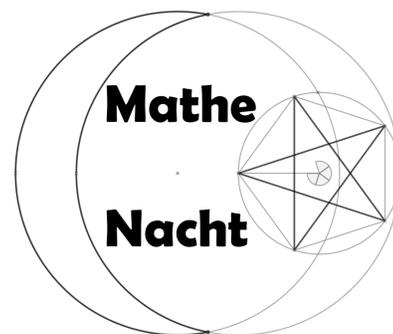
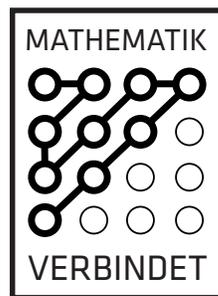


# Integration und Taylor



## 1. Aufgabe:

Entscheide, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Korrigiere die falschen Aussagen oder widerlege sie mit einem Gegenbeispiel.

- Für Zerlegungen  $Z_1, Z_2$ , eines Intervalls  $[a, b]$ , gelte  $Z_1 \subset Z_2$ . Dann gilt für die Ober- und Untersummen  $U(Z_1, f) \leq O(Z_2, f)$ .
- $Z$  sei eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Eine Funktion  $f$  heißt genau dann Riemann-integrierbar, wenn  $\inf_Z U(Z, f)$  und  $\sup_Z O(Z, f)$  übereinstimmen.
- Alle stetigen Funktionen auf einem Intervall  $[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  sind dort auch integrierbar.
- $f : [0, 100] \rightarrow \mathbb{R}$  sei Riemann-integrierbar. Dann ist auch  $f^* : [0, 100] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^*(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{N} \\ f(x) & , \text{sonst} \end{cases}$  Riemann-integrierbar und es gilt  $\int_0^{100} f(x) dx = \int_0^{100} f^*(x) dx$ .
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei beschränkt. Dann ist  $f$  dort integrierbar.
- Das Integral ist linear.
- Für stetige Funktionen ist  $|\int_a^b f(x) dx| = \int_a^b |f(x)| dx$ .
- Ist  $f$  auf  $[a, b]$  unstetig, so gilt dies auch für die zugehörige Integralfunktion.
- Die Stammfunktion einer Funktion ist eindeutig.
- Bei uneigentlichen Integralen ist die obere Intervallgrenze  $\infty$  oder die untere Intervallgrenze  $-\infty$ .

## 2. Aufgabe:

Erkläre den Mittelwertsatz anschaulich mit Hilfe einer Skizze.

## 3. Aufgabe:

Berechne die folgenden Integrale.

1.  $\int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 + 4x + 5) \cdot \sin(\pi x) dx$
2.  $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$
3.  $\int_0^a x \cos(x^2 + 1) dx$
4.  $\int \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} dx$

#### 4. Aufgabe :

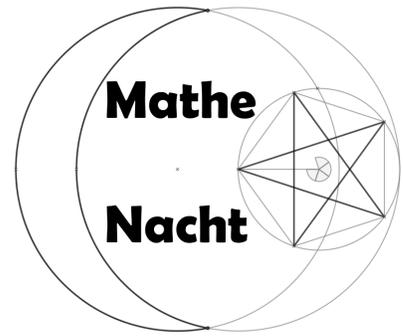
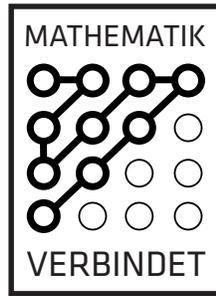
Bestimme die Ableitung der Funktion  $f(x)$  gegeben durch:

$$f(x) = \int_0^{e^{x+1}} \sqrt{1+t^2} dt$$

#### 5. Aufgabe :

- a) Berechne das Taylorpolynom 2. Grades von  $f(x) = (x+1)e^{2x}$  im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .
- b) Ermittle mit Hilfe des Taylorpolynoms einen Näherungswert für  $f(0,5)$ .
- c) Begründe, ob es sinnvoll ist, einen Näherungswert für  $f(200)$  mittels des Taylorpolynoms aus b) zu berechnen.

# Topologie und Funktionen mehrerer Veränderlicher



## 1. Aufgabe:

Welche der Aussagen sind wahr und welche falsch? Begründe!

- Der Durchschnitt einer offenen Menge mit einer abgeschlossenen Menge ist weder offen noch abgeschlossen.
- Jede ein-elementige Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist folgenkompakt.
- Nur für BA** Jede konvergente Folge im metrischen Raum ist eine Cauchy-Folge.
- Sei  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p(x, y) = x^4 + 2y^2$ . Entweder ist die Menge  $M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, y) > 0\}$  offen oder  $M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, y) + 1 > 0\}$  ist abgeschlossen.
- Die Vereinigung zweier nicht leerer abgeschlossenen Kugeln im  $\mathbb{R}^n$  ist kompakt.

## 2. Aufgabe:

Überprüfe ob für beliebige  $n \in \mathbb{N}$  die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, x_2) := \frac{n}{2}|x_1 - x_2|$  eine Norm ist.

## 3. Aufgabe:

Gegeben ist die Menge:

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 2, y \leq 1 \text{ und } |x + y| \leq \frac{3}{2}\}$$

1. Skizziere die Menge.
2. Untersuche ob M abgeschlossen, offen oder beschränkt ist.
3. Was ändert sich wenn wir:
  - a)  $M \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 < 1\}$ ,
  - b)  $M \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \sin y\}$ ,
  - c)  $M \cup \mathbb{R}^2$  oder
  - d)  $M \times \mathbb{R}$betrachten?

## 4. Aufgabe:

Welche der beiden Funktionen  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) := \cos(2\pi(x + y)) \quad g(x, y) := \sin\left(\frac{2\pi}{|x| + |y|}\right)$$

besitzt in  $(0, 0)$  einen Grenzwert? Begründe!

### 5. Aufgabe:

In welchen Punkten ist die folgende Funktion stetig?

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

### 6. Aufgabe:

Gegeben ist die Menge  $Y := \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ . Bestimme  $\overset{\circ}{Y}, \bar{Y}, \partial Y$ .

### 7. Aufgabe: (Zusatz)

Beweise folgende Aussagen:

1. Jede Norm auf  $\mathbb{R}^n$  ist stetig.
2. **Nur für BA** Seien  $M_1, M_2 \subseteq X$  für einen metrischen Raum  $(X, d)$  kompakt. Dann ist

$$M_1 \cdot M_2 := \{a \cdot b \mid a \in M_1, b \in M_2\}$$

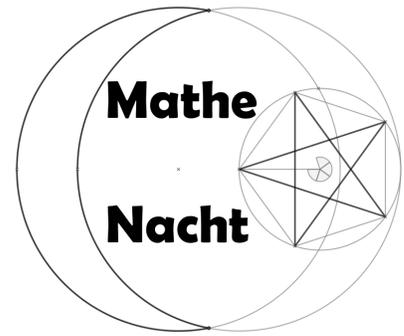
kompakt.

3. Für jedes  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt folgende Gleichung:

$$\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2 \left( \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 \right)$$

(Diese Gleichung wird auch Parallelogrammgleichung genannt, aber warum?)

# Differenzierbarkeit



## 1. Aufgabe:

Gegeben seien  $\alpha > 0$  und die Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y, z) = |xyz|^\alpha.$$

Untersuchen Sie, ob  $f$  im Nullpunkt

- stetig,
- partiell differenzierbar,
- total differenzierbar ist.

## 2. Aufgabe:

- Bestimmen Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , die der Gleichung  $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  in allen Punkten des  $\mathbb{R}^2$  genügen.
- Für welche Richtungen  $\nu \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|\nu\| = 1$ , wird die Richtungsableitung  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(0, 0)$  maximal bzw. minimal?

Hinweis zu a): Mittels Kettenregel forme man die Gleichung um in eine (einfachere) Gleichung für die Funktion  $v(\xi, \eta) := u(x, y)$ , die durch die Variablentransformation

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

definiert ist.

## 3. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Geben Sie eine Darstellung für die Tangentialebene an die Fläche  $\{(x, y, f(x, y)) \text{ für } x, y \in \mathbb{R}\}$  im Punkt  $(1, 1)$  an.
- Berechnen Sie  $f_{xy}$  und  $f_{yx}$  im Nullpunkt. Ist  $f_{xy}$  stetig im Nullpunkt?
- Geben Sie die Richtungsableitungen von  $f$  im Punkt  $(2, 3)$  an.
- Auf welchen Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$  ist  $f$  total differenzierbar? (mit Begründung)

#### 4. Aufgabe:

Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$  und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = \sum_{j=1}^k \|x - a_j\|^2$$

mit der euklidischen Norm  $\|\cdot\|$ . Zeigen Sie, dass  $f$  ein eindeutig bestimmtes globales Minimum besitzt, und berechnen Sie es.

#### 5. Aufgabe:

Bestimmen Sie für die Funktionen

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 x_3^{-1} \end{pmatrix}$$

,

$$g : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 + y_2 \\ \sin(y_1) \\ \ln(y_2) \end{pmatrix}$$

und  $h$  der Verknüpfung dieser beiden Funktionen, die Jacobi-Matrizen  $f'(x)$ ,  $g'(y)$  und  $h'(x)$  sowie  $h'(\frac{\pi}{e}, e, 1)$ .

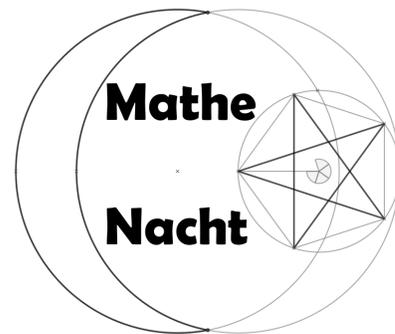
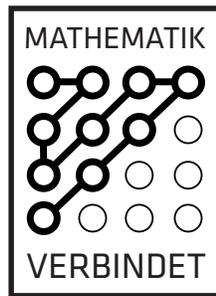
#### 6. Aufgabe:

Begründen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 + 2$$

auf der Menge  $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 2\}$  ihr Maximum und ihr Minimum annimmt, und bestimmen Sie Maximum und Minimum nachvollziehbar.

# Auflösbarkeit und Extrema unter Nebenbedingungen



## 1. Aufgabe: (*Umkehrsatz*)

a) Untersuche, ob die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

in den Punkten (1,1) und (0,0) lokal umkehrbar ist. Wenn möglich, gib die Umkehrfunktion an.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(u, v) = (2uv, v^2 - u^2).$$

Zeige, dass es zu jedem  $(x_0, y_0)$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  eine Umgebung  $U$  von  $(x_0, y_0)$  gibt, so dass  $f$  eingeschränkt auf  $U$  injektiv ist. Ist  $f$  selbst injektiv?

## 2. Aufgabe: (*Implizite Funktion*)

Sei  $y(x)$  implizit gegeben durch

$$F(x, y) = y^3 + x^5 + 2y = 0$$

a) Für welche Werte  $(x, y)$  kann man nach  $y$  auflösen?

b) Berechne  $y'(x)$ .

## 3. Aufgabe: (*Auflösbarkeit von Gleichungssystemen*)

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x + y + z = 0 \quad (2)$$

a) Zeige, dass dieses Gleichungssystem an der Stelle  $(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{-1}{\sqrt{13}})$  lokal eindeutig nach  $(y, z)$  auflösbar ist.

b) Berechne für die in a) implizit definierte Funktion  $g(x) = (y, z)$  die Ableitung  $g'(0)$ .

## 4. Aufgabe: (*Extrema unter Nebenbedingungen*)

Bestimme die kritischen Punkte der folgenden Funktion

$$f(x, y) = x^2 y^2 - x^2 + 1$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + 15y^3 = 15$$