Integration und Taylor

1. Aufgabe:

Entscheide, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Korrigiere die falschen Aussagen oder widerlege sie mit einem Gegenbeispiel.

- Für Zerlegungen Z_1, Z_2, eines Intervalls $[a,b]$, gelte $Z_1 \subset Z_2$. Dann gilt für die Ober- und Untersummen $U(Z_1, f) \leq O(Z_2, f)$.
- Z sei eine Zerlegung von $[a,b]$. Eine Funktion f heißt genau dann Riemann-integrierbar, wenn $\inf_Z U(Z,f)$ und $\sup_Z O(Z,f)$ übereinstimmen.
- Alle stetigen Funktionen auf einem Intervall $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ sind dort auch integrierbar.
- $f : [0,100] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar. Dann ist auch $f^* : [0,100] \to \mathbb{R}$, $f^*(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{N} \\ f(x) & , \text{sonst} \end{cases}$ Riemann-integrierbar und es gilt $\int_0^{100} f(x)dx = \int_0^{100} f^*(x)dx$.
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. Dann ist f dort integrierbar.
- Das Integral ist linear.
- Für stetige Funktionen ist $|\int_a^b f(x)dx| = \int_a^b |f(x)|dx$.
- Ist f auf $[a,b]$ unstetig, so gilt dies auch für die zugehörige Integralfunktion.
- Die Stammfunktion einer Funktion ist eindeutig.
- Bei uneigentlichen Integralen ist die obere Intervallgrenze ∞ oder die untere Intervallgrenze $-\infty$.

2. Aufgabe:

Erkläre den Mittelwertsatz anschaulich mit Hilfe einer Skizze.

3. Aufgabe:

Berechne die folgenden Integrale.

1. $\int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 + 4x + 5) \cdot sin(\pi x)dx$
2. $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$
3. $\int_0^a xcos(x^2+1)dx$
4. $\int \frac{x^2}{x^2-2x+1}dx$

4. Aufgabe:

Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x)$ gegeben durch:

$$f(x) = \int_0^{e^{x+1}} \sqrt{1+t^2}\ dt$$

5. Aufgabe:

a) Berechne das Taylorpolynom 2. Grades von $f(x) = (x+1)e^{2x}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Ermittle mit Hilfe des Taylorpolynoms einen Näherungswert für $f(0,5)$.

c) Begründe, ob es sinnvoll ist, einen Näherungswert für $f(200)$ mittels des Taylorpolynoms aus b) zu berechnen.

Topologie und Funktionen mehrerer Veränderlicher

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Welche der Aussagen sind wahr und welche falsch? Begründe!

- ☐ Der Durchschnitt einer offenen Menge mit einer abgeschlossenen Menge ist weder offen noch abgeschlossen.
- ☐ Jede ein-elementige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist folgenkompakt.
- ☐ **Nur für BA** Jede konvergente Folge im metrischen Raum ist eine Cauchy-Folge.
- ☐ Sei $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ p(x, y) = x^4 + 2y^2$. Entweder ist die Menge $M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ p(x, y) > 0\}$ offen oder $M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ p(x, y) + 1 > 0\}$ ist abgeschlossen.
- ☐ Die Vereinigung zweier nicht leerer abgeschlossenen Kugeln im $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

2. Aufgabe:

Überprüfe ob für beliebige $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) := \frac{n}{2}|x_1 - x_2|$ eine Norm ist.

3. Aufgabe:

Gegeben ist die Menge:

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \leq 2,\ y \leq 1 \text{ und } |x + y| \leq \frac{3}{2}\}$$

1. Skizziere die Menge.
2. Untersuche ob M abgeschlossen, offen oder beschränkt ist.
3. Was ändert sich wenn wir:

   a) $M \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 < 1\}$,
   b) $M \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = \sin y\}$,
   c) $M \cup \mathbb{R}^2$ oder
   d) $M \times \mathbb{R}$

   betrachten?

4. Aufgabe:

Welche der beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \cos(2\pi(x + y)) \quad g(x, y) := \sin\left(\frac{2\pi}{|x| + |y|}\right)$$

besitzt in $(0, 0)$ einen Grenzwert? Begründe!

5. Aufgabe:

In welchen Punkten ist die folgende Funktion stetig?

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. Aufgabe:

Gegeben ist die Menge $Y := \{\frac{1}{k} |\ k \in \mathbb{N}\}$. Bestimme $\mathring{Y}, \overline{Y}, \partial Y$.

7. Aufgabe: (*Zusatz*)

Beweise folgende Aussagen:

1. Jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist stetig.
2. **Nur für BA** Seien $M_1, M_2 \subseteq X$ für einen metrischen Raum (X,d) kompakt. Dann ist

$$M_1 \cdot M_2 := \{a \cdot b|\ a \in M_1, b \in M_2\}$$

kompakt.

3. Für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt folgende Gleichung:

$$||x+y||_2^2 + ||x-y||_2^2 = 2\left(||x||_2^2 + ||y||_2^2\right)$$

(Diese Gleichung wird auch Parallelogrammgleichung genannt, aber warum?)

Differenzierbarkeit

Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Gegeben seien $\alpha > 0$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = |xyz|^\alpha.$$

Untersuchen Sie, ob f im Nullpunkt

a) stetig,

b) partiell differenzierbar,

c) total differenzierbar ist.

2. Aufgabe:

a) Bestimmen Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die der Gleichung $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ in allen Punkten des $\mathbb{R}^2$ genügen.

b) Für welche Richtungen $\nu \in \mathbb{R}^2$, $||\nu|| = 1$, wird die Richtungsableitung $\frac{\partial u}{\partial \nu}(0,0)$ maximal bzw. minimal?

Hinweis zu a): Mittels Kettenregel forme man die Gleichung um in eine (einfachere) Gleichung für die Funktion $\nu(\xi,\eta) := u(x,y)$, die durch die Variablentransformation

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

definiert ist.

3. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Geben Sie eine Darstellung für die Tangentialebene an die Fläche $\{(x,y,f(x,y))$ für $x,y \in \mathbb{R}\}$ im Punkt $(1,1)$ an.

b) Berechnen Sie f_{xy} und f_{yx} im Nullpunkt. Ist f_{xy} stetig im Nullpunkt?

c) Geben Sie die Richtungsableitungen von f im Punkt $(2,3)$ an.

d) Auf welchen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ ist f total differenzierbar? (mit Begründung)

4. Aufgabe:

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} ||x - a_j||^2$$

mit der euklidischen Norm $||\cdot||$. Zeigen Sie, dass f ein eindeutig bestimmtes globales Minimum besitzt, und berechnen Sie es.

5. Aufgabe:

Bestimmen Sie für die Funktionen

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 x_3^{-1} \end{pmatrix}$$

,

$$g : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 + y_2 \\ \sin(y_1) \\ \ln(y_2) \end{pmatrix}$$

und h der Verknüpfung dieser beiden Funktionen, die Jacobi-Matrizen $f'(x)$, $g'(y)$ und $h'(x)$ sowie $h'(\frac{\pi}{e}, e, 1)$.

6. Aufgabe:

Begründen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 + 2$$

auf der Menge $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 2 \right\}$ ihr Maximum und ihr Minimum annimmt, und bestimmen Sie Maximum und Minimum nachvollziehbar.

Auflösbarkeit und Extrema unter Nebenbedingungen

1. Aufgabe: (*Umkehrsatz*)

a) Untersuche, ob die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

in den Punkten (1,1) und (0,0) lokal umkehrbar ist. Wenn möglich, gib die Umkehrfunktion an.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, f(u,v) = (2uv, v^2 - u^2).$$

Zeige, dass es zu jedem (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine Umgebung U von (x_0, y_0) gibt, so dass f eingeschränkt auf U injektiv ist. Ist f selbst injektiv?

2. Aufgabe: (*Implizite Funktion*)

Sei $y(x)$ implizit gegeben durch

$$F(x,y) = y^3 + x^5 + 2y = 0$$

a) Für welche Werte (x, y) kann man nach y auflösen?

b) Berechne $y'(x)$.

3. Aufgabe: (*Auflösbarkeit von Gleichungssystemen*)

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

$$x + y + z = 0 \tag{2}$$

a) Zeige, dass dieses Gleichungssystem an der Stelle $(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{-1}{\sqrt{13}})$ lokal eindeutig nach (y, z) auflösbar ist.

b) Berechne für die in **a)** implizit definierte Funktion $g(x) = (y, z)$ die Ableitung $g'(0)$.

4. Aufgabe: (*Extrema unter Nebenbedinungen*)

Bestimme die kritischen Punkte der folgenden Funktion

$$f(x,y) = x^2y^2 - x^2 + 1$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + 15y^3 = 15$$